

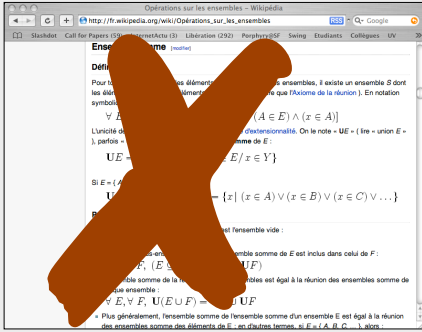
Logique des ensembles

Aurélien Bénel
*Systèmes d'information, management des connaissances
 et communication, Bureau T107
 aurelien.benel@utt.fr*

Outils mathématiques pour la modélisation, Université de technologie de Troyes, Automne 2007

Approche encyclopédique ?

2



The image shows a screenshot of a Wikipedia article titled "Ensemble" (Set). The text is partially obscured by a large orange 'X'. Visible text includes: "Pour la théorie des ensembles, il existe un ensemble S dont les éléments sont les ensembles...", "L'unicité de l'élément neutre est garantie par l'axiome de l'extensionnalité. On le note « E » (le « union E »), parfois « E ».", and "Si E = {x | (x ∈ A) ∨ (x ∈ B) ∨ (x ∈ C) ∨ ...} est l'ensemble vide.".

Approche historique

3

- La logique...
 - Aristote (IV° s. av. J.C.) & Porphyre (III° s.)
 - « *Un outil pour les philosophes* »
 - Boole (milieu XIX° s.)
 - « *Une algèbre proche de celle du lycée* »
 - Carroll (fin XIX° s.)
 - « *Un jeu pour les enfants* »

Aristote : Un « outil » pour les philosophes

4

- Philosophes ?

- Outil ?

Aristote : Expressions

5

- Expression :
 - Sans liaison
 - *Homme*
 - *Court*
 - *Bœuf*
 - *Vainqueur*
 - Selon une liaison
 - *L'homme court*
 - *L'homme est vainqueur*
- « C'est seulement par la liaison que se produit l'affirmation ou la négation. »

Aristote : Termes

6

- Terme
 - Universel :
 - *homme*
 - Singulier :
 - *Callias*

Aristote : Liaisons

7

- Liaisons :
 - d'attribution
 - *est homme*
 - autres
 - *mange*

- *mange* → *est mangeant*

Aristote : Propositions

8

- Proposition
 - Singulière
 - Affirmative
 - *Callias est juste*
 - Négative
 - *Callias n'est pas juste*
 - Universelle
 - Affirmative
 - *Tout homme est juste*
 - Négative
 - *Nul homme n'est juste*
 - Particulière (opposition de *contradiction* à une universelle)
 - Affirmative
 - *Quelque homme est juste*
 - Négative
 - *Quelque homme n'est pas juste*

Aristote : Exemple de syllogisme

9

- Exemple :
 - *Aucun S n'est P*
 - *Tout S est R*
 - Donc : *Quelque R est P*

Aristote : 'Patron' de syllogismes

10

Types de propositions :

- A : *Tout *** est ****
- E : *Nul *** n'est ****
- I : *Quelque *** est ****
- O : *Quelque *** n'est pas ****

Types de figures :

- 1ère : **** X est Y, *** Z est X, Donc *** Z est Y*
- 2ème : **** X est Y, *** Z est Y, Donc *** Z est X*
- 3ème : **** X est Y, *** X est Z, Donc *** Z est Y*

Potentiellement :

- (AEIO)*(AEIO)*(AEIO)*(f1 f2 f3)
- 192 syllogismes possibles
- Seuls 14 sont valides

Moyen mnémotechnique médiéval

11

Syllogismes valides

- 1ère figure
 - **barbara, celarent, darii, ferio**
- 2ème figure
 - **cesare, camestres, festino, baroco**
- 3ème figure
 - **darapti, felapton, disamis, datisi, bocardo, ferison**

Porphyre (III^e s.)

12



« Eclaircissons ce que nous voulons dire en prenant l'exemple d'une seule catégorie. L'essence est elle-même un genre ; sous elle vient le **corps** ; sous le corps, le **corps animé** ; sous celui-ci, l'**animal** ; sous l'animal, l'**animal capable de raison** ; sous celui-ci l'**homme** ; sous l'homme, **Socrate, Platon** et chaque membre [de l'espèce] des hommes. »

Porphyre, Introduction, II.6.

Frise de la bibliothèque de Schölkheim (Allemagne)
 Artiste : Hermann, 1257. Photographie : Gaiest, 2009.

Boole : opérations logiques

16

- xy
 - les philosophes mathématiciens
- $x+y$
 - les philosophes et les mathématiciens
- $x-y$
 - les philosophes mais pas les mathématiciens

Boole : Analogies avec « l'algèbre du lycée »

17

- $xy=yx$
- $x+y=y+x$
- $z(x+y)=zx+zy$
- $z(x-y)=zx-zy$
- $x=y+z \Leftrightarrow x-z=y$

Boole : Où le mènera l'analogie ?

18

- Classes remarquables : 0 et 1
 - Propriétés
 - $0x = 0$
 - $0+x = x$
 - $1x = x$
 - Quelle signification logique ?
 - 0 : la classe vide
 - 1 : la classe universelle

Boole : Limites de l'analogie

19

- $1+x = 1$
- $x+yz = (x+y)(x+z)$

Boole : La proposition comme équation

20

Soit x les animaux, y les hommes, z les chevaux.

- Tout homme est animal
 - $y(1-x)=0$
- Nul homme n'est cheval
 - $yz=0$
- Quelque animal est homme
 - $xy \neq 0$
- Quelque animal n'est pas homme
 - $x(1-y) \neq 0$

Boole : Le syllogisme comme système d'équations

21

- Tout cheval est animal
- Nulle plante n'est animal
 - $x(1-y)=0$
 - $zy=0$
 - $zx=0$
 - Nulle plante n'est cheval

Boole : Mathématisation de la logique
ou « logicisation » des mathématiques ?

22

« Il n'est pas de l'essence des mathématiques
de s'occuper des idées de nombre et de
quantité »

Boole, *Mathematical analysis of logic*, 1847.

Carroll : Un jeux pour les enfants

23

« Si donc, cher lecteur, vous voulez bien observer fidèlement ces
règles [...], je vous promets en toute confiance que la logique
symbolique se révélera pour vous comme l'un des plus
passionnants, sinon /e plus passionnant, des jeux intellectuels !
Dans cette première partie, j'ai évité avec soin toutes les difficultés
qui, selon moi, dépassaient le niveau d'intelligence d'un enfant de
douze à quatorze ans. »

Carroll, *Symbolic logic*, 1896.

Carroll : Univers du discours

24

« Supposons tout d'abord que le
diagramme ci-contre soit un espace
clos attribué à une classe de choses
que nous avons choisie pour
'univers du discours', ou, en abrégé,
univers. »

Carroll, *Symbolic logic*, 1896.

« Nous aurions pu commencer cette
affaire en disant : 'Prenons un
Univers de Gâteaux' (cela sonne
bien, non ?) »

Carroll, *The game of logic*, 1887.



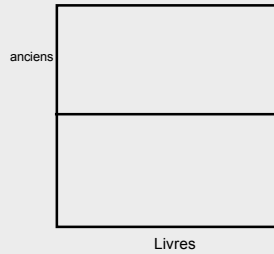
Livres

Carroll : Une qualité

25

« Supposons, en deuxième lieu, que nous ayons choisi une **qualité** déterminée, que l'on peut appeler **x**, et que nous ayons **divisé** la classe à laquelle nous avons attribué la totalité du diagramme en deux classes plus petites dont les différences respectives sont **x** et non **x** [...] et que nous ayons attribué la moitié **nord** du diagramme à la première [...] et la moitié **sud** à la seconde [...]. »

Carroll, *Symbolic logic*, 1896.



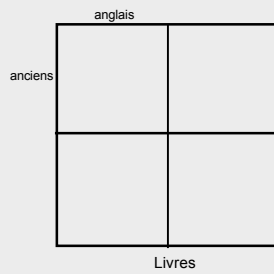
Carroll : Deux qualités

26

« Supposons, en troisième lieu, que nous ayons choisi une autre **qualité**, que l'on peut appeler **y**, et que nous **subdivisé** la classe-**x** en deux classes dont les différences respectives sont **y** et **y'** ; qu'en outre nous ayons attribué la cellule **nord-ouest** à la première [...] et la moitié **nord-est** à la seconde [...]. »

« Supposons, en quatrième lieu, que nous ayons subdivisé de même la classe-**x'** et attribué la cellule **sud-ouest** à la classe-**xy**, et la cellule **sud-est** à la classe **xy'**. »

Carroll, *Symbolic logic*, 1896.



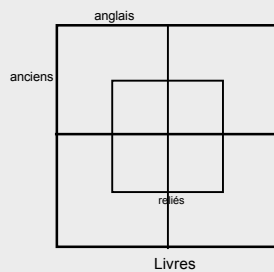
Carroll : Trois qualités

27

« Supposons, que le diagramme soit le diagramme bi-littéral que nous avons employé dans le livre III, et que nous le transformions en diagramme tri-littéral en traçant un **carré intérieur**, de façon à diviser chacune des quatre cellules primitives en deux parties »

« Supposons ensuite que nous ayons choisi une qualité déterminée que nous appellerons **m** [...] nous avons attribué le **carré intérieur** à **m** et le **reste du carré** à la classe **m'**. »

Carroll, *Symbolic logic*, 1896.

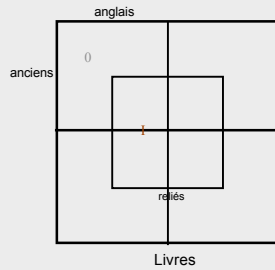


Carroll : « Jetons »

28

Nous conveniendrons qu'un **jeton rouge posé sur une cellule** signifie : 'Cette cellule est occupée' -- c'est à dire : 'Elle contient au moins une chose'.
 Nous conveniendrons également qu'un **jeton rouge posé sur la ligne** séparant deux cellules signifie : 'L'espace formé par ces deux cellules est occupé ; mais on ignore où exactement se trouvent ses occupants [...]'.
 Nous conveniendrons également qu'un **jeton gris, s'il est posé dans une cellule** signifie : 'Cette cellule est vide', c'est-à-dire : 'Elle ne contient rien'.

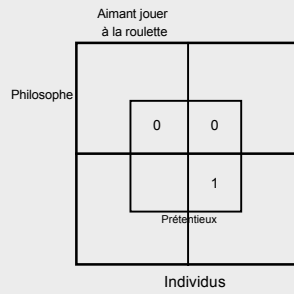
Carroll, *Symbolic logic*, 1896.



Carroll : Syllogismes

29

- *Aucun philosophe n'est prétentieux*
- *Quelques individus prétentieux n'aiment pas jouer à la roulette*
- *Quelques individus n'aimant pas jouer à la roulette ne sont pas des philosophes*



La logique des ensembles à travers l'histoire

30



- $x(1-y)=0$
- $zy=0$
- $zx=0$

- 1ère figure
 - barbara, celarent, darii, ferio
- 2ème figure
 - cesare, camestres, festino, baroco
- 3ème figure
 - darapti, felapton, disamis, datisi, bocardo, ferison

